

加倍奉還

每個人都有生日，在學校上課時班上當然有可能會有二位同學生日剛好是同一天的，這種機率大不大？如果根據直覺來判斷，大概機率不會高，因為一年可是至少有 365 天的，人很多的話當然可能性就高，但同班同學也不過 4、50 位，碰巧同一天恐怕不容易

個人也曾在班上上課時玩過這樣的遊戲。我們就假設班上共有 50 位同學吧，老師就跟同學開個賭盤：班上 50 位同學一定有 2 位生日是同一天。如果班上 50 位同學中沒有同學生日是同一天的話，玩家下注多少就由莊家「加倍奉還」，亦即下注 10 元玩家就可贏回 20 元，下注 100 元贏回 200 元，以此類推。如果班上真的有二位同學生日是同一天，賭注就由莊家沒收。現在徵求莊家？一般情況大家怕作莊家賠錢，所以都沒有人願意，那就只好由老師來作莊家了。

遊戲開始：每位同學把自己的生日寫在小紙片上，共 4 位數，如 7 月 4 日就寫 0704，12 月 31 日就寫 1231，然後把小紙條與旁邊的同學互換保管，以昭公信。交換完後，由第一排的第一位同學唸出自己手上紙條上的數字，然後每位同學看一下手上的紙條，如有相同的就舉手確認，沒有的話就換下一位，直到有人相同或全部唸完沒有人相同時遊戲結束。

請問，莊家會賠錢的機率高嗎？我們就來分析一下。現在假設想像有一個房間內有 365 張椅子，每張椅子依序標上 1 月 1 日至 12 月 31 日的標號(簡化一點我們把 2 月 29 日忽略)，班上同學依序進入房間，找到標示自己生日的椅子坐下，如果那張椅子已經有人坐在上面了就表示有人生日是和你同一天了。

我們先算算全班 50 位同學生日都不相同的機率是多少，再用 1 減去這個機率不是就可以算出至少有 2 個人生日相同的機率了嗎？這是最簡單的算法。

那麼 50 位同學生日都不相同的機率有多少呢？第一位同學 365 個坐位都可以坐，他的選擇是 365/365；第二位除了第一位同學的椅子以外有 364 個椅子可坐(因為生日不同所限)，所以他的選擇是 364/365，依此類推。每位同學的生日是獨立事件，所以 50 位同學都坐到沒有人坐椅子的機率 P_{50} 為：

$$\begin{aligned} P_{50} &= (365/365) \times (364/365) \times (363/365) \times \dots \times (318/365) \times (317/365) \times (316/365) \\ &= (365 \times 364 \times 363 \times \dots \times 318 \times 317 \times 316) / 365^{50} \end{aligned}$$

$$= 0.03$$

也就是說，至少有二人生日相同的機率為 $1.00 - 0.03 = 0.97$ 。這個機率是不是出乎大家預料的高？如果莊家只是賭加倍奉還，那簡直太划算了！如果同學願賭的人很多，老師豈不賺翻了？

根據同理計算，當 23 個人時，此機率是低於 $1/2$ 的，當人數愈多，至少有 2 人生日相同的機率快速增加，有 30 人時機率就會接近 0.7，你看 50 人時就到 0.97 了。加倍奉還的遊戲只要夠 30 人對莊家來說就划算了！