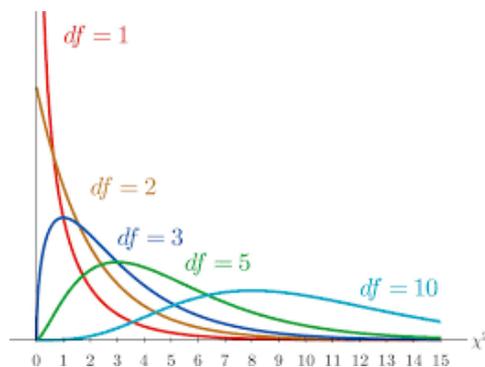


## 卡方分配

卡方分配( Chi-square distribution， Chi 就是希臘字母  $\chi$ ，唸作 kai，與中文「開」同音 )，卡方檢定是應用最廣泛的統計方法之一。卡方分配和常態分配有密切的關係，因為卡方分配是由常態分配轉換而來的。現假設從一常態分配的母群體中每次隨機抽取一個  $x_1$ ，並且用公式  $Z = (x - \mu) / \sigma$  轉換為  $Z$  值，如此重覆進行無限多次，就可得到一個平均數  $\mu = 0$ ，標準差  $\sigma = 1$  的常態分配。我們再從這一個  $Z$  值的常態分配中任意抽取一個  $Z$  值加以平方，並將其值命名為  $\chi_1^2$ ，則每一個  $\chi_1^2$  均可表示為：

$$\chi_1^2 = Z^2 = ((x - \mu) / \sigma)^2$$

上式中  $\chi_1^2$  右下角的 1 表示每次只抽取 1 個，求  $Z$  值後再予以平方。如果重覆抽取無限多次，就可以得到無限多個  $\chi_1^2$  的值，若將這些值的次數分配畫出來，就可得到下圖自由度(degree of freedom, df)為 1 的曲線。



如果我們每次抽取的是 2 個  $x_1$ ，並將此 2 個  $x_1$  都化為  $Z$  值並平方後再相加，就可以得到  $\chi_2^2$ ，抽無限多次後即可得到自由度為 2 的那條曲線。如此類

$$X = \sum_{i=1}^k Z_i^2$$

推，我們可以把自由度增加到  $k$ ，則隨機變數  $Z$  的平方和就稱為自由度為  $k$  的卡方分配。不同自由度的  $\chi_n^2$  分配面積可以查統計學或電腦中的附表。

一般而言， $\chi_n^2$  分配具有下列幾個特性：

1. 自由度為  $n$  時， $\chi_n^2$  分配的平均數為  $n$ ，例如  $\chi_{10}^2$  的分配，我們期望

的平均數即為 10。

2. 自由度為 2 或 2 以上時，眾數的位置在  $n-2$  的地方，例如  $\chi_{10}^2$  的眾數位置在  $10-2=8$  處。
3.  $\chi_n^2$  分配之標準差為  $\sqrt{2n}$ ，例如  $\chi_{10}^2$  的標準差為  $\sqrt{2 \times 10} = 4.47$ 。
4. 當自由度愈來愈大時， $\chi_n^2$  分配便愈接近常態分配，此時，該項分配的平均數等於  $n$ ，標準差等於  $\sqrt{2n}$ 。一般而言， $n \geq 30$  時， $\chi_n^2$  分配即近似常態分配。