卜瓦松分配

卜瓦松分配(Poisson Distribution)又稱卜氏分配，為法國數學家 S. D. Poisson 所導出，故以其姓氏命名。卜氏分配是一種間斷分配，適用於某一特定空間或時間內計算成功次數的機率分配。在二項分配中，當一個單位空間或時間可分成許多小部份 (即 n 很大) 而在一次試驗中成功機率又很小 (即 p 很小) 時，即符合卜氏分配。例如單位時間內「打進來的電話次數」、「車禍發生次數」、「機器的故障數」、「自然災害發生數」、「通過收費站車輛數」、「車站的到站候客人數」、或「單位面積內之缺點數」……等就可運用卜氏分配。

設 λ 為每測量單位內 x 發生之平均數，即 λ = np，e 為自然對數的底(其值為常數 e = 2.718)，則在該測量單位內，剛好發生 x 次之機率為：

$$p(x;\ \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

由於此式計算麻煩，可在統計學書中的附表或在電腦中都有現成表格可查。卜氏分配之平均數為 λ ，變異數亦為 λ 。

通常只要 n 很大 p 很小，$\lambda = np$ 不大不小而且是個已知定數，Poisson 分布就可以代替二項分布了。譬如某商店每星期進進出出的客人很多（= n），但每個客人買烏魚子的機率很小（= p），只知道平均一星期賣出兩付：$\lambda = np = 2$。那麼這家商店每星期開始時應有幾付烏魚子的庫存？當然不能只有兩付，因為平均歸平均，售量超過平均數的機率很大。當然庫存太多也會影響整個商店的運作。根據 Poisson 分布 p (x ; 2)，我們算得下表：

λ	0	1	2	3	4	5	≥ 6
p(x;2)	.135	.271	.271	.180	.090	.036	.017

由上表可知售量達到 5 付以上的機率只有 5.3%，而達到 6 付以上則只有 1.7%。所以合理的庫存量為 4 付（平均 19 星期才會有一次缺貨），如果怕萬一，那麼 5 付就非常保險（平均 59 星期才會有一次缺貨）。

再舉一例：

假設注射某疫苗的人有不良反應的機率為 0.001，求 2,000 人中
(1) 恰有 3 人 ， (2) 超過 2 人 注射後有不良反應的機率。

因為：n = 2,000， p = 0.001 ，$\lambda = np = 2{,}000 \times 0.001 = 2$

(1) $P(x = 3) = (2^3 e^{-2})/3! = (2^3 \times 2.718^{-2})/(3 \times 2 \times 1) = 0.180$

(2) $P(x > 2) = 1 - \{P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)\} = 1 - (0.135 + 0.271 + 0.271)$

$= 1 - 0.677 = 0.323$ (各機率可查上表得到)