

$$E(X) = \sum_i p_i x_i$$

期望值

所謂的期望值(Expected Value ，EV)，維基百科中的解釋如下：

在機率論和統計學中，一個離散性隨機變數的期望值（或數學期望，亦簡稱期望，物理學中稱為期待值）是試驗中每次可能的結果乘以其結果機率的總和。換句話說，期望值像是隨機試驗在同樣的機會下重複多次，所有那些可能狀態平均的結果，便基本上等同「期望值」所期望的數。期望值可能與每一個結果都不相等，換句話說，期望值是該變數輸出值的加權平均。期望值並不一定包含於其分布值域，也並不一定等於值域平均值。其計算公式為：

例如，擲一枚公平的六面骰子，其每次「點數」的期望值是 3.5，計算如下：

$$E(x) = 1 \times 1/6 + 2 \times 1/6 + 3 \times 1/6 + 4 \times 1/6 + 5 \times 1/6 + 6 \times 1/6 = 3.5$$

不過如上所說明的，3.5 雖是「點數」的期望值，但卻不屬於可能結果中的任何一個，因為是根本沒有可能擲出此點數的。其所代表的意思，我們可以把它理解為，投擲一枚骰子無窮多次後，所有出現點數的平均是 3.5。

或許我們會問，知道這個有什麼用？有的，最常見的應用就是賭博。例如，賭場中一種常見的賭輪盤上有 38 個數字，每一個數字被選中的機率都是相等的。賭注一般押在其中某一個數字上，如果輪盤的輸出值和這個數字相等，那麼下注者可以獲得相當於賭注 35 倍的獎金（原注不包含在內），若輸出值和下注的數字不同，則賭注就輸掉被收走了。考慮到一共有 38 種可能的結果，當然我們賭博的目標是「贏錢」，若以 1 美元賭注押在某一個數字上，則獲利的期望值為：贏的「機率 38 分之 1，能獲得 35 元」，加上「輸 1 元的情況 37 種」，結果約等於負的 0.0526 美元，這就是下賭 1 元此賭局時每一局的期望值。期望值的意思就是說，平均起來每賭 1 美元就會輸掉 0.0526 美元，即賭輪

$$E(X) = 35 \cdot \frac{1}{38} - 1 \cdot \frac{37}{38} \approx -0.0526$$

盤以 1 美元作賭注的期望值為負 0.0526 美元。

當然，實際上每次下注時不是贏 35 元就是輸 1 元，可是的贏的機率只有 $1/38$ ，輸的機率確有 $37/38$ ，期望值的意思就是賭了很多很多次以後，平均每次會輸 0.0526 元。你可能會說，注定會輸為什麼還有人會玩？沒錯，這就是人的「賭性」。每局的 0.0526 元到哪裡去了？當然就是莊家(就是賭場)贏走了，莊家把一部份拿來作為提供場地、賭具、空調照明、服務人員、遊樂節目……等的開銷，其他的就是賭場的利潤。這個期望值的比率是計算過的，不能太高也不能太低，因為太低了賭場沒有利潤甚至虧本，太高了太難贏或贏太少，就會對賭徒缺乏吸引力！

同學們，了解了期望值的觀念後，你能夠解以下各題嗎？

- 請計算每張統一發票的中獎期望值。如果有人要收購尚未開獎的統一發票，出多少錢買一張才是公平的？
- 請計算至少要多少張統一發票才會有一張中獎？
- 請計算每張「大樂透」的中獎期望值？買一張要多少成本？
- 各種不同的公益彩券，哪一種對消費者最有利？
- 為什麼有人不買合法的公益彩券而去下注非法的「樂透」？