

近似數值的演算

我們知道，統計資料可分為精確數值和近似數值兩類。精確數值即絕對準確，毫無誤差之數據，可以由細心的點計得到，例如點計班上此堂課的到課人數或是市場交易時的收付款。就理論上來說，對於間斷數據，只要我們點計或計算過程小心，是可以避免誤差的。可是當數量龐大時，在實務上也很難算得一個都不差。統計數值大半為測量得到的近似值，既是近似值就必有誤差，我們可以從有效數字的觀念知道該近似值的誤差範圍。但是當數個近似值之間的運算及運算後的誤差應該如何取捨，就應該再進一步的瞭解。這樣可以避免在處理這類資料時，自以為精確的儘量多取小數位數，實際上這樣做反而是錯誤的。

1、 加減運算後的有效數字

數個數值經過加法或減法運算之後，在小數點以後的有效數字，應圓整為與參與運算的各數值中最小的有效數字相同。

例如 $3.16 + 2.7 = 5.9$ ，兩個數值相加之和好像是 5.86，但是 3.16 小數點後有 2 位，2.7 小數點以後只有一位，所以要先將 3.16 四捨五入為 3.2 也變成小數點後一位，因此 3.16 與 2.7 之和為 5.9，有效位數為 2 位。

同樣的，兩個數值的減法運算或超過兩個數值加減法運算後的有效數字，最後結果小數點以後的有效數字應與參與運算中最小的有效數字為準。

2、 乘、除或開方運算後的有效數字

統計資料經過乘法、除法或開方運算以後，運算結果的有效數字，應圓整為參與運算的各數值中有效位數最小的相同。

例如：近似值 73.24 與 4.52 相乘，其乘積為 331.0448，可是此項乘積有效數字應為 4 和 3 中較小的也就是 3，所以取 331 即可，小數點以下四捨五入，全部捨去。其中的道理可以解釋如下：

(1) 近似值 73.24 之真正數值為 73.24 ± 0.005 ，即 $73.235 \sim 73.245$ ，故其最小值可能為 73.235，而最大值可能為 73.245。

(2) 近似值 4.52 之真正數值為 4.52 ± 0.005 ，即 $4.515 \sim 4.525$ ，故其最小值為 4.515，而最大值為 4.525。

(3) 73.24×4.52 ，其最小值和最大值分別為

$$73.235 \times 4.515 = 330.656 \quad (\text{最小值})$$

$$73.245 \times 4.525 = 331.434 \quad (\text{最大值})$$

由以上的說明可知，無論是 330.656 或 331.434，經圓整後，都是 331，所以乘積圓整為三位有效數字 331 並無不妥。同樣道理，也可以決定除法和開方結果之有效數字。

再如：

$$\sqrt{81.9} = 9.05$$

$$6.59 \times 2.3 = 15$$

$$32.65 \div 24 = 1.360 \quad (24 \text{ 為點計數字})$$

$$32.65 \div 24 = 1.4$$

$$1.048 \div 0.023 = 46$$

近似值運算後，按上述規則取了有效數字，超過的部份，必須加以「圓整」(round off)。最常用的圓整方法是四捨五入法，由於 1, 2, 3, 4 為捨，而 5, 6, 7, 8, 9，為入，因此運算項比較多時，這種方法會有偏高的趨勢。為了避免這個問題，可以「末位偶數法」來修正，亦即四捨六入，若逢五時，則前一位為奇數時進位，為偶數捨棄，因此末位數會全部成為偶數，這個方法可以使累積誤差最小。

當然，平時的生活上的應用，並不需要用到這個有效數字的觀念，因為誤差並不會造成生活上的實質影響，但是在某些科學研究誤差非常重要的場合，我們就可以以此原則來取捨。還有，同學們在使用多位數計算器時，對小數點的取捨也可以自行做合宜的判斷，不需要問老師取到小數點以下幾位了！

還有一點我們必需注意，那就是透過運算得到的近似值和精確數值之間的差異，我們稱為「捨入誤差(round-off error)」，如果在一系列運算中的一步或者多步產生了捨入誤差，在某些情況下，這個誤差會隨著運算次數增加而累積變得很大，最終可能會使結果失去意義或誤了大事。以下是幾個很有名的例子：

- 1990 年 2 月 25 日，海灣戰爭期間，在沙烏地阿拉伯宰赫蘭的愛國者飛彈防禦系統因浮點數捨入錯誤而失效，該系統的計算機精度僅有 24

位，存在 0.0001% 的計時誤差，所以有效時間閾值是 20 個小時。當系統運行 100 個小時以後，已經積累了 0.3422 秒的誤差。這個錯誤導致飛彈系統不斷地自我循環，而不能正確地瞄準目標。結果未能攔截一枚伊拉克飛毛腿飛彈，飛毛腿飛彈在軍營中爆炸，造成 28 名美國陸軍死亡。

- 1996 年 6 月 4 日，在亞利安五號運載火箭發射後 37 秒，偏離預定軌道而炸毀。原因是軟體系統試圖將 64 位浮點數轉換為 16 位浮點數，造成溢出錯誤。
- 溫哥華證券交易所曾開發了一項股票指數。當其在 1982 年推出時，指數的值是 1000.000。在後來的重新計算時多次運用捨入到小數點後三位的操作。22 個月以後，指數的值是 524.881，然而事實上應該是 1009.811。